






Open Archive Toulouse Archive Ouverte

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible

This is an author's version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/20928>

To cite this version:

Vidal, Emmanuel  and Duquenne, Philippe  and Pingaud, Hervé 
Optimisation des plans de charge pour un flow-shop dans le cadre d'une production en Juste A Temps : 2- Formulation mathématique. (1999) In: 3ème Congrès Franco-Quebequois de Génie Industriel, 1999 - 1999 (Montréal, Canada). (Unpublished)

Any correspondence concerning this service should be sent
to the repository administrator: tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr

**Optimisation des plans de charge pour un flow-shop dans le cadre d'une
production en Juste A Temps :
2- Formulation mathématique**

Emmanuel VIDAL, Philippe DUQUENNE, Hervé PINGAUD✂
Département Génie des Systèmes Industriels, Institut National Polytechnique de
Toulouse
6, allée Emile Monso, BP 4038, 31029 Toulouse Cedex, FRANCE
E-mail: vidale@univ-inpt.fr duquenne@univ-inpt.fr
✂Laboratoire de Génie Chimique, CNRS-UMR 5503, INPT/ENSIGC
Chemin de la Loge, 31078 Toulouse Cedex, France
E-mail: Herve.Pingaud@ensigct.fr

Résumé

Le modèle d'organisation d'un atelier dans le cadre d'une production en flux tiré est présenté. L'originalité de la formulation réside dans une représentation discrète et non uniforme du temps. Elle permet de travailler avec des durées opératoires variables et de moduler les effectifs pour réaliser la même charge de travail par poste. Le temps de séjour des articles est variable et s'adapte à la demande de livraison planifiée. La fonction objectif est un surcoût basé sur le prix de revient.

1- Introduction :

L'organisation du travail a toujours été un sujet de prédilection pour le Génie Industriel [1]. Elle est encore aujourd'hui au cœur de la discipline et au premier plan de l'actualité. Mais par comparaison au début du siècle, les données ont changé. L'analyse du problème n'est plus confinée à l'organisation technique de la production au sein de l'entreprise dans un contexte de surcharge de travail. Il y a pénurie de travail à l'échelle de la collectivité territoriale et ce chômage a un coût légitime, élevé, qui pénalise l'économie des états. Ce coût est indirectement supporté par les entreprises et les travailleurs. Il y a donc une dimension sociale reconnue de ce sujet qui conduit à une volonté de distribution équitable du travail au niveau des nations, et de retour à un équilibre économique. Ce contexte se traduit par une remise en cause régulière des méthodes de gestion industrielle.

En France, par exemple, les mesures gouvernementales récentes sur la réduction du temps de travail sont négociées secteur par secteur parce que les intérêts du patronat et des employés doivent être préservés. L'entreprise qui embauche n'accroît pas ses dépenses grâce à des mesures d'allègement fiscal, mais aussi moins directement par une réorganisation du travail basée sur la recherche de plus de flexibilité afin de répondre au mieux aux exigences du marché. La mise en œuvre pratique d'une nouvelle organisation n'est réaliste qu'en intégrant les contraintes techniques des systèmes de production, les besoins des marchés et les pratiques des acteurs engagés dans cette production, d'où la négociation sectorielle. Mais la flexibilité est une source de perturbations pour les employés dues à des horaires trop irréguliers, des situations conflictuelles dans les

demandes de congés, des déplacements excessifs,... Il y a donc nécessité de trouver des solutions sociales acceptées par les différents partenaires en prenant en compte toute la complexité du problème.

Le Génie Industriel se doit de proposer des méthodes et des outils pour imaginer des organisations qui respectent les intérêts de chacun, donc de fixer les contraintes de tolérance tout en cherchant des critères de performances qui justifient le changement. Notre travail s'inscrit dans cette logique. L'étude porte sur l'organisation du travail dans un atelier de fabrication de type flowshop dont la production se fait en flux tiré.

2- Présentation du problème :

L'ordonnancement de l'atelier de fabrication d'un produit à cheminement unique est étudié dans le cadre d'une politique de juste à temps. La demande est planifiée par les dates de livraison d'une quantité connue d'articles. La date de mise à disposition de chaque article en bout de chaîne sera une variable du problème définie par un intervalle de tolérance autour de la date de livraison prévue.

Le système physique est constitué d'un ensemble de postes de travail connectés en série. La réalisation de chaque article de produit fini correspond à une succession d'opérations réalisées sur les postes, et enchaînées de manière linéaire. Chaque opération d'un article fait appel à des ressources sur le poste de travail. Nous nous focalisons sur la gestion des ressources humaines.

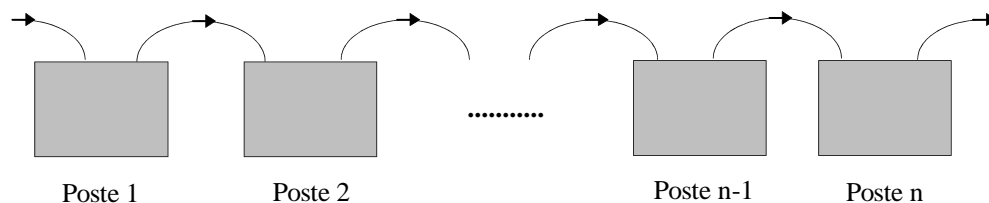


Figure 1 - Atelier de fabrication à cheminement unique

Par définition, la partie de la gamme opératoire attribuée à un poste correspond une charge de travail déterminée (en hommes.heures). Pour chaque article et opération, la durée opératoire, ou cycle, est considérée comme une fonction inversement proportionnelle au nombre d'opérateurs travaillant sur le poste au moment de l'opération. Par exemple, plus l'effectif du poste est élevé, plus le cycle est court. Cette variabilité est limitée dans un intervalle déterminé a priori. Par variations adaptées des cycles, il est donc possible de jouer sur les flux de production pour essayer de répondre à une demande non régulière en bout de chaîne. Corrélativement, cette adaptation induit des variations du rythme de travail des individus que l'on cherchera à minimiser dans la mesure du possible.

Les variables de décision caractérisant la gestion des ressources humaines dans un contexte réel est le sujet d'un article des mêmes auteurs dans ce cycle de conférences [2]. Les différentes formes de la flexibilité y sont énumérées, ainsi que les critères de

performances permettant de juger de la pertinence d'une solution. Dans la suite, le problème sera simplifié. L'affectation des ressources sera considérée sous une forme agrégée: la composition des équipes sur les postes et les compétences ne seront pas détaillées.

Nous étudierons la modélisation du système en vue d'une aide à la décision en formulant un problème d'optimisation sous contraintes. La fonction critère est de nature technico-économique. Elle évalue le coût de revient réel d'un nombre déterminé d'articles (horizon fini de planification), incluant la main d'œuvre et les coûts de stockage. Ainsi, par exemple, pour rendre compte de façon réaliste des perturbations inhérentes à la variation des cycles, elle augmente sous l'effet de l'inactivité éventuelle des opérateurs ou de la non qualité.

Le lien tissé entre les durées opératoires et le niveau de ressources est une spécificité et une source de complexité. Les modélisations classiques abordent généralement la modélisation sous l'hypothèse de durées opératoires indépendantes [3]. Il convient donc de développer cette partie de l'étude et nous proposons, au paragraphe suivant, une forme de modélisation appropriée.

2- Modélisation du processus de production

3.1 - Représentation de l'échelle de temps

Le temps peut être modélisé sous forme discrète par un nombre fini d'intervalles de durées connues. Ce nombre sera d'autant plus grand que la précision souhaitée sera fine. Chaque variable de décision est définie par une valeur sur un intervalle de temps. Les intervalles étant numérotés par des entiers, le temps apparaît directement comme un indice de la variable. Une décision se traduit par le changement de valeur d'au moins une variable de décision entre deux intervalles consécutifs.

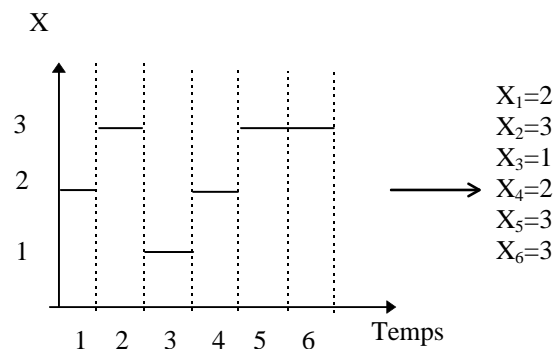


Figure 2 - Représentation sous forme discrète du temps

Sur la figure 2, la variable X est représentée par un ensemble de six valeurs (X_i), i variant de 1 à 6. La modélisation consiste alors à traduire le fonctionnement du système par un ensemble de contraintes (affectation cohérente des ressources, précedence des opérations,...) utilisant ces ensembles de variables.

Lorsque les durées opératoires sont connues, la longueur d'un intervalle de temps correspond au plus grand commun dénominateur (PGCD) des durées opératoires. Dans le contexte exposé au paragraphe précédent, ce calcul devient plus délicat car les durées opératoires sont variables. Le choix d'un intervalle très petit qui pourrait permettre de faire une bonne approximation de la réalité conduirait à des tailles de problèmes trop importantes, nous ne l'appliquerons pas. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes intéressés à des représentations discrètes et non uniformes du temps [4]. Une représentation événementielle inspirée des travaux de Pinto et Grossmann [5,6] a été adaptée à notre problème.

3- Concepts de base du modèle

Puisque le nombre d'articles de produit fini à mettre à disposition en bout de chaîne sur l'horizon de planification est une donnée et que la gamme opératoire est connue, le nombre total d'opérations à réaliser est calculable. Or chaque opération est délimitée par deux événements sur l'échelle de temps, il est donc possible de dénombrer un nombre maximal d'événements devant se produire. A ce stade du raisonnement, ni la date d'occurrence, ni l'ordre d'apparition ne sont connus. Le nombre d'événements est qualifié de 'maximal' car plusieurs d'entre eux peuvent se produire à la même date. Il faut donc trouver la position réelle de chaque événement dans la liste des événements possibles.

Le début (ou la fin) d'une opération pour un article i ($i=1$ à m), et un poste j ($j=1$ à n) est donc un unique événement à pointer dans une liste de k éléments ($k=1$ à v). Deux ensembles homogènes de variables binaires vont permettre de réaliser cette identification :

as_{ijk} désignera l'événement k de début de l'opération pour le poste j et l'article i
 ae_{ijk} désignera l'événement k de fin de l'opération pour le poste j et l'article i

et l'unicité de chaque événement se traduit sous forme d'une série de contraintes :

$$\begin{aligned} \forall i, j, \quad \sum_{k=1}^n as_{ijk} &= 1 \\ \forall i, j, \quad \sum_{k=1}^n ae_{ijk} &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Cette représentation permet de modéliser des contraintes du système de production (telles que les relations de précedence entre opérations de la gamme ou l'affectation cohérente des ressources) sans jouer directement sur la variable temps, mais simplement par interaction entre des événements. La relation entre les événements et le temps sera écrite sous forme d'un jeu séparé de contraintes. Cette indépendance va nous permettre d'insérer des cycles de production variables comme nous le montrons plus loin.

Prenons l'exemple d'un atelier constitué de deux postes qui doit fabriquer deux articles pour illustrer la démarche de construction du modèle. Chaque poste réalise une opération, la gamme sera traduite par deux opérations. Il y aura un total de quatre

opérations à faire, donc un ensemble de huit événements au maximum ($v=8$). Nous avons essayé de matérialiser sur le diagramme de la figure 3, le principe de fonctionnement du modèle par la superposition de deux diagrammes de Gantt : produit/temps et ressource/temps. Chaque opération est représentée par une barre copiée en deux exemplaires qui est étiquetée par le numéro de l'opération. Ces copies sont placées dans la partie supérieure et dans la partie inférieure et vont évoluer de concert. La partie supérieure du diagramme (produit/temps) représente les contraintes temporelles pour chaque article : l'opération 1 précède l'opération 2. La partie inférieure du diagramme (ressource/temps) traduit les contraintes disjonctives : une ressource n'accepte qu'une activité à un temps donné.

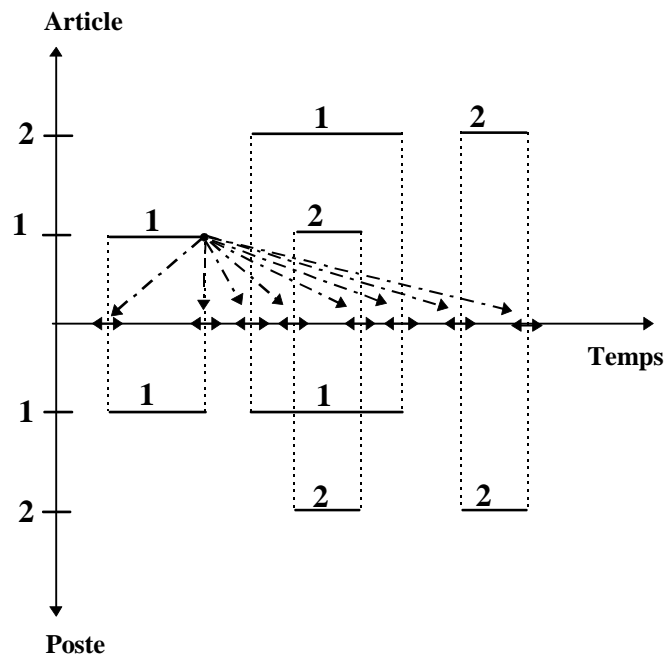


Figure 3 - Diagrammes de Gantt du plan de production

Les flèches qui partent de la fin de l'opération 1 pour l'article 1 indiquent le rôle des variables binaires ($ae(1,1,k)$, $k=1,8$), c'est à dire l'association effective avec un des huit événements possibles. Les événements portés sur l'axe de temps sont accompagnés de flèches à double sens pour rappeler que les événements ne sont pas datés, mais peuvent se déplacer.

3.3 Généralisation du modèle

Dans ce paragraphe, nous établissons la forme générale du modèle qui sera soumis à l'optimiseur. Les concepts introduits précédemment au moyen d'un exemple simple sont maintenant repris sous une forme générique. Nous présentons d'abord les variables du modèle, puis la forme des contraintes et, enfin, la fonction objectif.

4- Les variables du modèle

Soient

| | |
|--------|--------------------------|
| i | indice pour l'article |
| j | indice pour le poste |
| k, o | indices pour l'événement |

Les ensembles de variables entières sont:

| | |
|-------------|--|
| $n(j,k)$ | variable indiquant la disponibilité du poste j entre les événements k et $k+1$ |
| $ae(i,j,k)$ | variable binaire désignant l'affectation de la fin d'opération à l'événement k |
| $as(i,j,k)$ | variable binaire désignant l'affectation du début d'opération à l'événement k |
| E^{tot} | effectif présent sur l'atelier |
| $E(k)$ | effectif présent sur l'atelier entre les événements k et $k+1$ (état k) |
| $e(i,j)$ | effectif utilisé pour le poste j et l'article i |
| $y(k)$ | variable d'écart pour un événement k possible et non affecté |

Les ensembles de variables continues sont:

| | |
|----------|---------------------------------------|
| $t(k)$ | dates d'occurrence de l'événement k |
| $c(i,j)$ | durée opératoire ou cycle |

Les données sont :

| | |
|-------------|--|
| m | nombre d'articles |
| n | nombre de postes et d'opérations |
| v | nombre d'événements possibles |
| $c_{j,min}$ | valeur minimale du cycle pour le poste j |
| $c_{j,max}$ | valeur maximale du cycle pour le poste j |
| $l(i)$ | date de livraison planifiée de l'article i |
| w_j | charge de travail pour le poste j |

3.3.2 Les contraintes

L'écriture des contraintes se traduit par un ensemble d'équations de type égalité ou inégalité. Chaque groupe de relations correspond à l'expression d'une contrainte physique particulière du système de production. Puisque le nombre d'événements possibles est un nombre maximal, il faut prévoir le cas où des événements de cette liste ne sont pas affectés. Dès lors, il n'y aura pas de date, ni de fait, correspondant à la réservation. Ces événements seront gérés au moyen des variables d'écart $y[k]$, et rangés en début de liste grâce à des contraintes spécifiques. Les autres événements seront classés par ordre chronologique.

- relation de précedence pour un article i entre deux opérations (postes) de la gamme

$$\forall i, \forall j > 1, \forall k > 1, \quad as(i, j, k) \leq \sum_{o=1}^{k-1} ae(i, j-1, o) \quad (2)$$

Pour qu'une opération j débute sur l'événement k , l'événement déclenchant la fin de l'opération précédente ($j-1$) doit être affectée à un événement antérieur (de 1 à $k-1$).

- cohérence des événements de début et de fin de chaque opération

$$\forall i, \forall j, \forall k > 1, \quad ae(i, j, k) \leq \sum_{o=1}^{k-1} as(i, j, o) \quad (3)$$

Pour qu'une opération se termine à l'événement k , elle doit avoir débutée par une affectation sur un événement antérieur (de 1 à $k-1$).

- respect de la date de livraison échue de chaque article telle que consignée par la planification

$$\forall i, \quad l(i) \geq \sum_{k=1}^v ae(i, n, k) \cdot t(k) \quad (4)$$

La mise à disposition de l'article se fait à la fin de la dernière opération, date définie par la partie droite de l'inégalité ci dessus.

- affectation cohérente des postes

$$\begin{aligned} \forall j, \forall k > 1, \quad n(j, 0) &= 1 \\ \text{et} \quad n(j, k) &= n(j, k-1) - \sum_{i=1}^m as(i, j, k) + \sum_{i=1}^m ae(i, j, k) \\ \text{et} \quad 0 &\leq n(j, k) \leq 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Le poste, initialement disponible, fait l'objet d'un bilan des actions qui débutent et qui se terminent à la fin de chaque période. La variable désignant l'état de disponibilité est contrainte puisqu'il ne peut y avoir au plus qu'une opération par poste sur chaque période.

- définition de la durée opératoire et des dates de réalisation

$$\begin{aligned} \forall i, \forall j, \quad c(i, j) - \sum_{k=1}^v as(i, j, k) \cdot t(k) + \sum_{k=1}^v ae(i, j, k) \cdot t(k) &= 0 \\ c_{j, \min} &\leq c(i, j) \leq c_{j, \max} \\ \forall k > 1, \quad t(k-1) &\leq t(k) \end{aligned} \quad (6)$$

La durée de chaque opération est calculée comme la différence entre les dates de fin et de début d'opération. Chaque durée est contrainte entre deux bornes. Les événements sont classés par ordre chronologique.

- relation entre l'effectif et le cycle sur chaque poste et article

$$\forall i, \forall j, \quad e(i, j).c(i, j) - w_j = 0 \quad (7)$$

Le produit de l'effectif du poste pour chaque article par la durée de l'opération correspond à la charge de travail programmée sur le poste.

- Détermination de l'effectif de l'atelier

$$\begin{aligned} \forall k < v, \quad & E(0) = 0 \\ & E(k) = E(k-1) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n as(i, j, k).e(i, j) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n ae(i, j, k).e(i, j) \\ & E(k) - E^{tot} \leq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

L'effectif total de l'atelier à chaque état est calculé comme la somme des effectifs des postes entre les événements qui délimitent l'état. L'effectif maximal sur l'horizon de calcul sera le plus grand effectif calculé des différents états.

- Assignation effective des événements possibles et classement par ordre chronologique

$$\begin{aligned} \forall k, \quad & 0 \leq y(k) \leq 1 \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n as(i, j, k) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n ae(i, j, k) + y(k) \geq 1 \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n as(i, j, k) + y(k) \leq 1 \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n ae(i, j, k) + y(k) \leq 1 \\ \forall k > 1, \quad & y(k-1) - y(k) \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Les variables d'écart sont forcées à 1 s'il n'y a aucun démarrage et aucune fin d'opération associés à cet événement. Les variables d'écart sont classées par valeurs décroissantes de manière à regrouper les événements non affectés en début de liste. Ainsi, dès qu'une opération commence ou se termine, la variable d'écart est forcée à zéro.

3.3.3 La fonction objectif

La fonction objectif chiffre le coût de revient d'une solution en ne prenant en compte que les frais financiers sur les sommes engagées. Si le taux d'opportunité a pour valeur τ , le surcoût sur un objet de valeur V pour une durée d petite est calculé par l'approximation suivante :

$$V(1 + \tau)^d - V \approx V\tau d \quad (10)$$

Elle est formée d'une somme de cinq contributions correspondant aux activités suivantes:

- les stocks de matière première avant chaque poste

$$F_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n V_{i,j} \tau (d_{i,j} - \delta_{i,j})$$

avec

$V_{i,j}$ valeur ajoutée de l'article i au début du poste j

$d_{i,j}$ date de début de l'opération j pour l'article $i = \sum_{k=1}^v as(i, j, k).t(k)$

$\delta_{i,j}$ date de disponibilité de la matière pour l'opération j de l'article i

- les articles en cours

$$F_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n W_{i,j} \tau (f_{i,j} - d_{i,j})$$

avec

$W_{i,j}$ valeur de l'article i pendant la durée du poste $j = \sum_{l=1}^j V_{i,l}$

$f_{i,j}$ date de fin de l'opération j pour l'article $i = \sum_{k=1}^v ae(i, j, k).t(k)$

- le stock final avant livraison

$$F_3 = \sum_{i=1}^m W_{i,n} \tau (l(i) - f_{i,n})$$

- le travail

$$F_5 = (f_{m,n} - d_{1,1}).E^{\text{tot}}U$$

avec

U coût horaire du travail

- l'inactivité

$$F_6 = \sum_{k=1}^{v-1} (t(k+1) - t(k)).(E^{\text{tot}} - E(k)).S$$

avec

S coût horaire de l'inactivité

5- Conclusions et perspectives

Nous avons présenté une programmation mathématique du problème en variables mixtes (entières et continues). La fonction et certaines des contraintes sont de type non linéaire exclusivement sous la forme d'un produit de deux variables. Il est possible de reprendre la formulation pour les rendre linéaires au prix d'une augmentation du nombre de contraintes. Par ailleurs, la présence de variables à trois indices (i, j, k) augmente rapidement la taille du problème qui deviendra nécessairement limité par la complexité dans une utilisation à l'échelle de l'atelier industriel.

C'est pour cette raison que la démarche adoptée dans le travail de thèse d'E. Vidal [8] est composée de deux étapes. La première consiste à résoudre la formulation proposée dans cet article sur un cas d'étude représentatif de la problématique industrielle, mais de taille modeste de manière à rester dans le domaine d'obtention de la solution dans un temps raisonnable. Cette étape conduit alors à un optimum. Dans une seconde partie du travail, il reprend le problème en le résolvant par des heuristiques basées sur une séquence de sous problèmes qui autorise le traitement de tailles importantes. Les solutions des deux parties sont comparées sur le cas d'étude pour estimer le bien fondé des heuristiques [7]. Puis les heuristiques sont employées sur les problèmes de taille plus importante (plusieurs dizaine d'articles et une dizaine de postes)

Références :

- [1] Gousty Y. (1998) Le Génie Industriel, Coll. " Que sais je ? ", PUF Ed.
- [2] Vidal E., Duquenne P., Pingaud H. (1999) Optimisation des plans de charge pour un flow shop dans le cadre d'une production en juste à temps : 1-convergence entre besoins et capacités, 3^{ème} colloque international de Génie Industriel, Montréal, Canada
- [3] Lopez P., Esquirol P. (1998) L'ordonnancement, Ed. Economica
- [4] Blazewicz J., Dror M., Weglarz J. (1991) Mathematical programming formulations for machine scheduling : A survey, European Journal of Operational Research, 51, 283-300
- [5] Pinto J. M. and I. E. Grossmann (1995) A continuous time mixed integer linear programming model for short term scheduling of multistage batch plants, Ind. Eng. Chem. Res., **34**
- [6] Pinto J. M. and I. E. Grossmann (1996) An alternate MINLP model for short-term scheduling of batch plants with preordering constraints, Ind. Eng. Chem. Res., **35**
- [7] Vidal E., Duquenne P., Pingaud H. (1999) Optimisation des plans de charge pour un flow shop dans le cadre d'une production en juste à temps : 3-algorithmes génétiques et approche multi-critères, 3^{ème} colloque international de Génie Industriel, Montréal, Canada
- [8] Vidal E., (1999) thèse de doctorat en préparation à l'Institut National Polytechnique de Toulouse, Département Génie des Systèmes Industriels